**Cao học Khoa học tự nhiên Tp.HCM**

**Môn Quá trình ngẫu nhiên**

**Đề thi cuối kì cao học**

**Mục lục**

[**Khóa 28** 1](#_Toc26769921)

[**Khóa 27** 2](#_Toc26769922)

[**Khóa 26** 3](#_Toc26769923)

[**Khóa 25** 4](#_Toc26769924)

[**Khóa 24** 5](#_Toc26769925)

**Khóa 28**

**Câu 1. (2.5 điểm)**

Một cửa hàng có ba máy và hai thợ sửa máy. Tuổi thọ của mỗi máy tuân theo phân phối mũ với kì vọng là . Nếu máy bị hỏng thì thời gian cần thiết để một người thợ sửa máy đó tuân theo phân phối mũ với kì vọng là . Sau một thời gian sử dụng,

a) tính trung bình số máy hỏng. b) tính xác suất cả hai thợ sửa máy đều bận.

**Câu 2. (2.5 điểm)**

Giả sử số cuộc gọi đến một trung tâm mỗi giờ tuân theo quá trình Poisson với tỉ lệ .

a) Tính xác suất để có nhiều hơn cuộc gọi đến trong một giờ đầu tiên.

b) Người trả lời điện thoại chờ đến khi nào đủ cuộc gọi thì mới đi ăn trưa. Tính kì vọng thời gian chờ của người này.

c) Biết rằng có cuộc gọi đến trong bốn giờ đầu tiên. Tính xác suất để có cuộc gọi đến trong một giờ đầu tiên ().

**Câu 3. (2.5 điểm)**

Một giáo viên chuẩn bị loại bài kiểm tra để sinh viên kiểm tra nhiều lần trong năm học. Kết quả bài thi của lớp chỉ có hai loại là tốt và kém. Gọi là xác suất lớp làm bài tốt nếu bài kiểm tra thuộc loại và giả sử , , và . Loại bài kiểm tra lần tới phụ thuộc vào kết quả kiểm tra của lớp lần này. Nếu lớp làm tốt bài kiểm tra lần này, xác suất để lần sau bài kiểm tra là một trong loại như nhau. Nếu kết quả lần kiểm tra này là kém thì chắc chắn lần tới lớp sẽ được làm bài kiểm tra loại . Gọi là loại bài kiểm tra lần thứ .

a) có phải là xích Markov không? Giải thích và xác định ma trận chuyển (nếu có).

b) Sau một thời gian làm bài các bài kiểm tra thì tỉ lệ mỗi loại bài kiểm tra là bao nhiêu?

**Câu 4. (2.5 điểm)**

Cho và với là chuyển động Brown chuẩn và độc lập với nhau. Đặt

với . Chứng minh là chuyển động Brown.

**Khóa 27**

**Câu 1. (2.5 điểm)**

Quá trình ngẫu nhiên được định nghĩa như sau

với là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên

a) Tìm hàm phân phối của từ đó suy ra hàm mật độ của

b) Tìm và hàm hiệp phương sai

**Câu 2. (2.5 điểm)**

Số lỗi xảy ra của một mạng máy tính trong khoảng thời gian được mô tả quá trình Poisson thuần nhất . Theo quan sát những ngày trước thì trung bình giờ thì có một lỗi xảy ra (đơn vị (giờ)).

a) Tính xác suất có nhiều nhất lỗi trong và ít nhất lỗi trong và nhiều nhất lỗi trong

b) Tính xác suất có lỗi thứ xảy ra sau giờ

**Câu 3. (2.5 điểm)**

Cho là xích Markov với không gian trạng thái và ma trận xác suất chuyển

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Tìm

a)

b)

c) Với . Hỏi trạng thái nào là chuyển? trạng thái nào là lặp?

**Câu 4. (2.5 điểm)**

Cho và với là chuyển động Brown chuẩn và độc lập với nhau. Đặt

với . Chứng minh là chuyển động Brown.

**Khóa 26**

**Câu 1. (2.5 điểm)**

Cho là quá trình dừng yếu có hiệp phương sai

a) Chứng minh rằng

b) Đặt . Chứng minh rằng cũng là một quá trình dừng yếu có hàm hiệp phương sai

**Câu 2. (3 điểm)**

Một giáo viên chuẩn bị loại bài kiểm tra để sinh viên kiểm tra nhiều lần trong năm học. Kết quả làm bài thi của lớp chỉ có hai loại là tốt và kém. Gọi là xác suất lớp làm bài tốt nếu bài kiểm tra thuộc loại và giả sử rằng . Loại bài kiểm tra lần tới phụ thuộc vào kết quả kiểm tra của lớp lần này. Nếu lớp làm tốt bài kiểm tra lần này, xác suất để lần sau bài kiểm tra là một trong loại là như nhau. Nếu kết quả lần kiểm tra này là kém thì chắc chắn lần tới lớp sẽ được làm bài kiểm tra loại . Gọi là loại bài kiểm tra lần thứ .

a) có phải là xích Markov khôn? Giải thích và xác định ma trận chuyển nếu có.

b) Sau một thời gian làm các bài kiểm tra thì tỉ lệ mỗi loại bài kiểm tra là bao nhiêu?

**Câu 3. (2 điểm)**

Giả sử số cuộc gọi đến một trung tâm mỗi giờ tuân theo quá trình Poisson với tỉ lệ là

a) Tính xác suất để có nhiều hơn cuộc gọi đến trong một giờ đầu tiên.

b) Người trả lời điện thoại chờ đến khi nào đủ cuộc gọi thì mới đi ăn trua. Tính kì vọng thời gian chờ của người này.

c) Biết rằng có cuộc gọi đến trong bốn giờ đầu tiên. Tính xác suất để có cuộc gọi đến trong một giờ đầu tiên .

**Câu 4. (2.5 điểm)**

Cho và là hai quá trình Brown chuẩn độc lập nhau với nhau

a) Chứng minh rằng cũng là quá trình Brown b) Tìm phương sai của

**Khóa 25**

**Câu 1. (3 điểm)**

Viết phương trình tiến (forward) Kolmogorov cho quá trình sinh tử. Áp dụng cụ thể cho bài toán sau: Một tiệm photo có hai máy, tuổi thọ của mỗi máy đều có phân phối mũ với trung bình là . Tiệm chỉ có một thợ sửa máy với thời gian sửa máy có phân phối mũ với tỉ lệ .

**Câu 2. (3 điểm)**

Số chuyến xe buýt số 1 đến trạm dừng Bến Thành được mô hình hoá bởi quá trình Poisson với tỉ lệ là (/một giờ). Giả sử chúng ta đến trạm dừng xe buýt này lúc 7h sáng. Tính (và giải thích rõ ràng)

a) Xác suất chờ phải chờ xe buýt số 1 hơn nửa tiếng đồng hồ.

b) Xác suất có ít nhất 3 chiếc xe buýt số 1 đi qua trạm này từ 7h đến 9h.

c) Kì vọng thời gian chờ để đón được xe buýt số 1.

**Câu 3. (4 điểm)**

Một máy có hai bộ phận quan trọng quyết định sự vận hành của máy. Hai bộ phận này đồng nhất. Máy này vận hành được nếu một trong hai bộ phận này hoạt động. Nếu hôm nay cả hai bộ phận này hỏng thì hôm sau máy mới được sửa. Sau khí sửa chữa thì máy trở lại tình trạng hoàn toàn như máy mới. Việc kiểm tra tình trạng máy được thực hiện vào đầu giờ mỗi ngày trước khi vận hành để phát hiện tình trạng hỏng hóc của mỗi bộ phận. Nếu vào đầu giờ mỗi ngày cả hai bộ phận đều trong tình trạng tốt thì đến cuối ngày cả hai bộ phận sẽ hoạt động tốt với xác suất 0.5, một trong hai bộ phận bị hỏng với xác suất 0.25 và cả hai sẽ bị hỏng với xác suất 0.25. Nếu vào đầu giờ mỗi ngày chỉ có một bộ phận hoạt động tốt thì bộ phận này vẫn hoạt động tốt đến cuối ngày với xác suất 0.5.

a) Xác định xích Markov mô tả tình trạng hoạt động của máy và mô tả không gian các trạng thái.

b) Vẽ biểu đồ liên hệ giữa các trạng thái.

c) Các trạng thái này ở dạng lặp, chuyển hay hấp thu.

d) Xác định các xác suất dừng (nếu có).

**Khóa 24**

**Câu 1. (2 điểm)**

Số chuyến xe buýt số 1 đến trạm dừng Bến Thành được mô hình hoá bởi quá trình Poisson với tỉ lệ là (/một giờ). Giả sử chúng ta đến trạm dừng xe buýt này lúc 7h sáng. Tính (và giải thích rõ ràng)

a) Xác suất để có đúng 3 chiếc xe buýt số 1 đi qua trạm này từ 7h đến 9h.

b) Trung bình số chuyến xe buýt số 1 đi qua trạm này từ 7h đến 9h.

c) Chúng ta quyết định để 3 chiếc xe buýt số 1 đi qua và đón chiếc (xe buýt số 1 thứ tư). Tính kì vọng thời gian chúng ta phải chờ xe buýt số 1 ở trạm này.

**Câu 2. (4 điểm)**Một xe khách 4 chỗ chỉ hoạt động ở hai khu vực A và B. Nếu tài xế đón khách ở khu vực A Xác suất để khách ven cần chạy trong khu vực A này là còn chạy qua khu vực B là . Nếu tài xế đón khách ở khu vực B, xác suất để khách ven cần chạy trong khu vực B là 0.7, còn chạy qua khu vực A là 0.3. Chi phí khách phải trả để chạy trong khu vực A là 600 nghìn, chạy trong khu vực B là 800 nghìn, và chạy từ khu vực A qua B hay từ B qua A là 1 triệu 200 nghìn.

a) Xác định xích Markov và các không gian trạng thái.

b) Xác định ma trận chuyển.

c) Vẽ biểu đồ liên hệ giữa các trạng thái.

d) Các trạng tháy này là ở dạng lặp, chuyển hay hấp thu?

e) Tìm xác suất dừng.

f) Tính trung bình số cho tài xế kiếm được trên mỗi chuyến đi.

**Câu 3. (4 điểm)**

Một cửa tiệm photo có 3 máy photo và hai thợ sửa máy. Thời gian hoạt động của máy (đến khi bị hỏng) có phân phối mũ với trung bình là 10. Thời gian cần thiết để một thợ sửa máy sửa một máy hỏng có phân phối mũ với trung bình là 8. Sau một thời gian dài sử dụng, tính

a) Trung bình số máy bị hỏng hóc b) Xác suất để hai thợ sửa máy đều bận